

# Die Lösungen der Blasiusschen Grenzschichtdifferentialgleichung

Steinheuer, J.

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 20, 1968,  
S. 96-126



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# Die Lösungen der Blasius'schen Grenzschichtdifferentialgleichung

Von J. Steinheuer

Vorgelegt von H. Schlichting

(Eingegangen am 6. 1. 1967)

**Übersicht:** Die Blasius'sche Grenzschichtdifferentialgleichung  $f''' + ff'' = 0$  für die dimensionslose Stromfunktion  $f(\eta)$  wird systematisch auf ihre Lösungen hin untersucht. Unter Ausnutzung bekannter mathematischer Eigenschaften dieser Differentialgleichung und ihrer Lösungen und unter Verwendung gewisser Transformationen der Differentialgleichung gelingt es, eine Übersicht über alle reellen Lösungen zu gewinnen. Die Lösungen können in drei Lösungstypen unterteilt werden, die sich durch ihr asymptotisches Verhalten für  $\eta < 0$  unterscheiden: 1. der Lösungstyp I umfaßt alle Lösungen, für die eine Singularität auftritt; 2. Lösungen des Typs II besitzen die asymptotische Form  $f = \text{konst}$  für  $\eta \rightarrow -\infty$ ; 3. Lösungen des Typs III sind durch die asymptotische Form  $f = \alpha + \beta \eta$  für  $\eta \rightarrow -\infty$  gekennzeichnet. Die Lösungen des Typs I bilden in der  $f' - f$ -Ebene eine Enveloppe, deren Verlauf berechnet wird. — Die Lösungen werden hinsichtlich ihrer physikalischen Interpretierbarkeit diskutiert.

*Summary:* A systematic study of the solutions of Blasius's boundary layer differential equation  $f''' + ff'' = 0$  for the dimensionless streamfunction  $f(\eta)$  is presented. Using known mathematical properties of this differential equation and its solutions and employing certain transformations thereof it is possible to obtain a survey of all its real solutions. Three types of solutions exist which differ in their asymptotic behaviour for  $\eta < 0$ : (1) Type I include all solutions which contain a singularity; (2) solutions of type II display the asymptotic form  $f = \text{const}$  for  $\eta \rightarrow -\infty$ ; (3) solutions of type III are characterized by the asymptotic form  $f = \alpha + \beta \eta$  for  $\eta \rightarrow -\infty$ . The solutions of type I form an envelope in the  $f' - f$ -plane which has been calculated. — The solutions are discussed from the point of view of their physical interpretation.

## 1. Einleitung

Die Blasius'sche Plattengrenzschicht kann als Urtyp einer Strömung mit Reibung angesehen werden, die mittels der von L. Prandtl begründeten und von H. Schlichting [1] ausführlich dargestellten Grenzschichttheorie erfolgreich behandelt wird. Die Blasius'sche Differentialgleichung der Plattengrenzschicht ist in zahlreichen Arbeiten mit unterschiedlicher Zielsetzung behandelt worden. Dabei wurde der mathematische Charakter dieser gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichung dritter Ordnung und ihrer Lösungen insbesondere in einer neueren Arbeit von W. A. Coppel [8] eingehend untersucht. Auch verschiedene Lösungsverfahren zur numerischen Berechnung der Lösungen sind entwickelt worden [2, 3, 4, 5, 10, 12]. Als Mangel empfindet man jedoch, daß es bisher in der Literatur keine zusammenfassende Übersicht über alle Lösungen gibt. In diesem Bericht wird daher der Versuch unternommen, eine solche einheitliche, zusammenfassende Übersicht über alle existierenden Lösungen der Blasius'schen Grenzschichtgleichung zu geben, wobei das Hauptinteresse auf die physikalische Interpretation der Lösungen gerichtet ist.

## 2. Die Blasius'sche Differentialgleichung

### 2.1. Ableitung der Blasius'schen Differentialgleichung

Den Ausgangspunkt zur Aufstellung der Blasius'schen Grenzschichtdifferentialgleichung bilden die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen bei inkompressibler Strömung mit verschwindendem Druckglied in der Form:

Bewegungsgleichung:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Nach Einführen einer Stromfunktion

$$\psi(x, y) = \sqrt{\nu U_\infty x} \cdot f(\eta) \quad (3)$$

mit der dimensionslosen Variablen

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \cdot y^1) \quad (4)$$

ergibt sich bekanntlich für die dimensionslose Stromfunktion  $f(\eta)$  die folgende gewöhnliche, nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\boxed{f''' + ff'' = 0}, \quad (5)$$

wobei die Striche hier und im folgenden Ableitungen nach der Variablen  $\eta$  bedeuten. Die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  sind hierbei gegeben durch die Ausdrücke

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2} U_\infty \cdot f'(\eta) \quad (6)$$

und

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{x}} (\eta f' - f). \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Gebräuchlich sind auch andere Definitionen der dimensionslosen Stromfunktion  $f(\eta)$  und der dimensionslosen Variablen  $\eta$ , die sich jedoch von den in Gln. (3) und (4) eingeführten nur durch konstante Faktoren unterscheiden. Setzt man allgemein:

$\psi = a \sqrt{\nu U_\infty x} \cdot f(\eta)$  und  $\eta = b \sqrt{U_\infty / \nu x} \cdot y$ , so ergibt sich die zu Gl. (5) analoge Differentialgleichung  $f''' + (a/2b) f f'' = 0$ . Die Geschwindigkeitskomponente  $u$  ist dann durch  $u = a b U_\infty f'(\eta)$  definiert. Durch zweckmäßige Festlegung der Faktoren  $a/2b$  und  $a \cdot b$  sind dann auch  $a$  und  $b$  festgelegt. Beispielsweise ergibt sich durch Setzen von  $a/2b = a \cdot b = 1$  dann  $a = \sqrt{2}$  und  $b = 1/\sqrt{2}$ .

Als weitere physikalisch interessierende Größe sei noch der Ausdruck für den Geschwindigkeitsgradienten in  $y$ -Richtung angegeben, der ein Maß für die laminare Schubspannung darstellt:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4} U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} \cdot f''(\eta). \quad (8)$$

## 2.2. Randbedingungen

Um eine gegebene laminare Grenzschichtströmung, die durch das Gleichungssystem (1) und (2) und damit durch Gl. (5) richtig beschrieben wird, eindeutig zu kennzeichnen, müssen noch drei Randbedingungen gegeben sein. Einige physikalisch realisierbare Fälle sind in Abb. 1 schematisch skizziert.

- a) Für die Grenzschichtströmung längs einer halbumendlich langen ebenen Platte mit undurchlässigem Boden gelten die Randbedingungen (siehe Abb. 1, Skizze a):

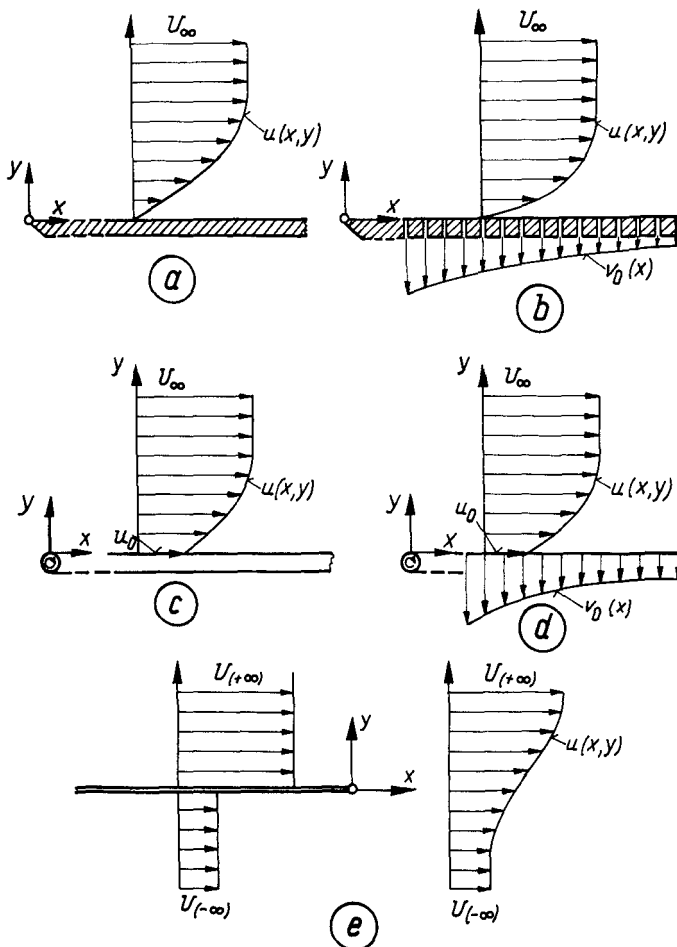


Abb. 1. Verschiedene Grenzschichtströmungen als Lösungen der Blasiuschen Differentialgleichung (schematisch)

$$y = 0: \quad u = 0, \quad v = 0$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow U_{\infty},$$

oder ausgedrückt durch die entsprechenden dimensionslosen Größen:

$$\eta = 0: \quad f' = 0, \quad f = 0 \quad (9a)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad f' \rightarrow 2. \quad (9b)$$

Diese Randbedingungen definieren das ursprüngliche, von *H. Blasius* [2] behandelte Problem der Plattengrenzschicht.

- b) Im Fall der Plattengrenzschicht mit senkrechtem Absaugen oder Ausblasen an der Wand ändern sich die Randbedingungen insofern, als an der Wand eine von Null verschiedene Normalgeschwindigkeit vorgeschrieben wird (siehe Abb. 1, Skizze b):

$$y = 0: \quad u = 0, \quad v = v_0(x)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow U_{\infty}$$

oder entsprechend

$$\eta = 0: \quad f' = 0, \quad f = f_0 = \text{konst} \quad (10a)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad f' \rightarrow 2. \quad (10b)$$

Dabei bedeutet  $v_0 < 0$  Absaugen und  $v_0 > 0$  Ausblasen bzw. wegen des Ausdrucks (7) für die Querkomponente  $v$  der Geschwindigkeit  $f_0 > 0$  Absaugen und  $f_0 < 0$  Ausblasen. Außerdem ist:

$$v_0 = v_0(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_{\infty} \nu}{x}} \cdot f_0 \quad (11)$$

eine Funktion der Lauflänge  $x$ , d. h. die Größe der Absaugung bzw. des Ausblasens muß entsprechend Gleichung (11) längs der Wand verteilt sein, damit die Reduktion des Gleichungssystems (1) und (2) auf die gewöhnliche Differentialgleichung (5) weiterhin möglich ist. Lösungen für diesen Fall wurden für zahlreiche Werte von  $f_0 \gtrless 0$  von *H. W. Emmons* und *D. Leigh* [3] angegeben.

- c) Eine andere Klasse von Lösungen ergibt sich für den Fall der undurchlässigen, aber mit konstanter Geschwindigkeit  $u_0$  bewegten Wand (siehe Abb. 1, Skizze c). Diese Grenzschichtströmung kann man sich in der Weise verwirklicht denken, daß die Wand aus einem über Rollen laufenden Band besteht. Wichtig ist, daß die Lage des Ursprungs  $x = 0$  fest bleibt. Für diesen von *J. Siekmann* [4] behandelten Fall gelten die Randbedingungen:

$$y = 0: \quad u = u_0 = \text{konst}, \quad v = 0$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow U_{\infty}$$

bzw. entsprechend

$$\eta = 0: \quad f' = f'_0 = \text{konst}, \quad f = 0 \quad (12a)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad f' \rightarrow 2. \quad (12b)$$

- d) Eine Kombination zwischen den Fällen b) und c) ist der allgemeine Fall der bewegten Wand mit senkrechtem Absaugen oder Ausblasen (siehe Abb. 1, Skizze d), der auch als eine Plattengrenzschicht mit schrägem Absaugen oder Ausblasen gedeutet werden kann. Die Randbedingungen sind hier:

$$y = 0: \quad u = u_0 = \text{konst}, \quad v = v_0 = v_0(x)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow U_\infty$$

oder entsprechend

$$\eta = 0: \quad f' = f'_0 = \text{konst}, \quad f = f_0 = \text{konst} \quad (13a)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad f' \rightarrow 2. \quad (13b)$$

Diesen Fall haben *R. Iglisch* und *D. Grohne* [5] untersucht.

- e) Weitere mögliche Lösungen, die sich von allen bisherigen Fällen unterscheiden, sind durch Abwesenheit einer Begrenzungswand gekennzeichnet. Es handelt sich dabei um die laminare Vermischung zweier Parallelströmungen unterschiedlicher Geschwindigkeit, die ebenfalls durch die Blasius'sche Differentialgleichung (5) beschrieben wird (siehe Abb. 1, Skizze e). Die einzusetzenden Randbedingungen sind:

$$y = 0: \quad v = 0$$

$$y \rightarrow +\infty: \quad u \rightarrow U_{(+\infty)}$$

$$y \rightarrow -\infty: \quad u \rightarrow U_{(-\infty)}$$

oder entsprechend nach Einführung des dimensionslosen Verhältnisses

$$\lambda = \frac{U_{(-\infty)}}{U_{(+\infty)}} \quad (14)$$

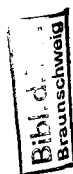
der Geschwindigkeiten der beiden Parallelströmungen:

$$\eta = 0: \quad f = 0 \quad (15a)$$

$$\eta \rightarrow +\infty: \quad f' \rightarrow 2 \quad (15b)$$

$$\eta \rightarrow -\infty: \quad f' \rightarrow 2\lambda. \quad (15c)$$

Dieser Fall wurde von *R. C. Lock* [6] auch für den Fall, daß die beiden Strömungen aus verschiedenen Medien mit unterschiedlichen Stoffeigenschaften bestehen, und von *J. Steinheuer* [7] behandelt. Hierzu ist zu bemerken, daß die Randbedingung (15a) eine willkürliche Festlegung der Nullstromlinie  $f = 0$  bedeutet, die physikalisch nicht gerechtfertigt ist. Wie in einer Arbeit von *L. Ting* [8] gezeigt wird, muß eine physikalisch sinnvolle dritte Randbedingung, die aus einer Betrachtung der Grenzschichtnäherung höherer Ordnung gewonnen wird, die Randbedingung (15a) ersetzen. Hierauf soll in Abschnitt 4.1 noch näher eingegangen werden.



### 2.3. Eigenschaften der Blasiuschen Differentialgleichung

Im folgenden sollen kurz die wichtigsten Eigenschaften der Differentialgleichung (5) angegeben werden. Diese Ergebnisse sind aus den Arbeiten von *R. Iglisch* und *D. Grohne* [5] und *W. A. Coppel* [9] entnommen.

- a) Ist  $f(\eta)$  eine Lösung von (5), dann ist auch  $F(\xi) = a \cdot f(\xi)$  mit  $\xi = a \eta$  eine Lösung von (5).
- b) Ist  $f(\eta)$  eine Lösung von (5), dann ist auch  $F(\xi)$  mit  $\xi = \eta + c$  eine Lösung. Diese Eigenschaft drückt die Verschiebbarkeit des Nullpunktes der unabhängigen Veränderlichen  $\eta$  aus, die in Gl. (5) selbst nicht explizit auftritt.
- c) Sind die Anfangswerte  $f_0$  beliebig,  $f'_0 \geq 0$  und  $f''_0 > 0$  bei  $\eta = 0$  gegeben, dann existiert die Lösung für alle  $\eta > 0$  und  $f'(\eta)$  strebt für  $\eta \rightarrow +\infty$  gegen einen konstanten Grenzwert  $k > 0$ . Hiernach ist es insbesondere möglich, neue Anfangswerte  $F_0$ ,  $F'_0$  und  $F''_0$  aus  $f_0$ ,  $f'_0$  und  $f''_0$  so zu bestimmen, daß  $F'(\eta)$  für  $\eta \rightarrow +\infty$  gegen den Wert 2 strebt entsprechend der Randbedingung  $f'(\infty) = 2$  bei allen im vorigen Abschnitt aufgezählten Grenzschichtströmungen. Unter Benutzung der Eigenschaft a) findet man

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2} f_0 \\ F'_0 &= \frac{2}{k} f'_0 \\ F''_0 &= \left(\frac{2}{k}\right)^{3/2} f''_0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

mit  $k = f'(\eta \rightarrow \infty)$ .

- d) Exakte Lösungen von Gl. (5) sind:

$$f = \frac{3}{\eta - \eta^*} \quad (17)$$

mit

$$\eta^* = \text{konst.},$$

$$f = \alpha = \text{konst} \quad (18)$$

und

$$f = \alpha + \beta \eta. \quad (19)$$

### 2.4. Transformationen der Blasiuschen Differentialgleichung

In der Differentialgleichung (5) kommt die unabhängige Veränderliche  $\eta$  nicht explizit vor. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, die Differentialgleichung auf eine solche niedrigerer Ordnung zu reduzieren, was eine Untersuchung u. U. erleichtert. Folgende Transformationen sind von verschiedenen Autoren angegeben worden:

1.  $f' = g = g(f)$ . Es ergibt sich die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$g \ddot{g} + \dot{g}^2 + \dot{g} f = 0. \quad (20)$$

wobei die Punkte Ableitungen nach  $f$  bedeuten. Von dieser Transformation wird in [9], [10] und [12] Gebrauch gemacht. Insbesondere nehmen in dieser Transformation die exakten Lösungen (17), (18) und (19) die Formen

$$g = -\frac{1}{3}f^2, \quad (21a)$$

$$g = 0 \quad (21b)$$

und

$$g = \beta \quad (21c)$$

an.

2.  $f'^2 = R = R(f)$ . Es ergibt sich die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\sqrt{R} \ddot{R} + \dot{R} \dot{f} = 0, \quad (22)$$

wobei hier die Punkte ebenfalls Ableitungen nach  $f$  bedeuten. Diese Transformation wurde von *R. Iglisch* und *D. Grohne* [5] und von *F. Kemnitz* [11] benutzt.

3.  $f' = x$ ,  $f'' = y$ . Diese Substitution führt auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + x = 0 \quad (23)$$

mit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'''}{f''} = -f. \quad (24)$$

Diese Transformation wird von *C. W. Jones* [12] angegeben.

4. Ebenfalls in [12] wird eine Transformation auf eine Differentialgleichung erster Ordnung angeführt. Sie gelingt durch die Substitution

$$X = -\frac{ff'}{f''} \quad (25)$$

$$Y = -\frac{f'^2}{ff''} \quad (26)$$

und führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y}{X} \cdot \frac{X - Y - 2}{X + Y - 1}. \quad (27)$$

Im Koordinatensystem  $X, Y$  entartet die exakte Lösung (17) der ursprünglichen Differentialgleichung (5) zu einem Punkt mit den Koordinaten  $X_B = 3/2$  und  $Y_B = -1/2$ , der eine Singularität, und zwar einen Strudel-punkt, darstellt. In einer abgewandelten Form wurde Gleichung (27) auch von *J. Siekmann* [13] zur Berechnung der Integralkurven benutzt.



Im folgenden wird in der Hauptsache von der Darstellungsmöglichkeit der Lösungen in der  $g - f$ -Ebene gemäß der ersten Transformation Gebrauch gemacht. Auch auf die Integralkurven von Gl. (27) gemäß der vierten Transformation soll kurz eingegangen werden. Die Formen der Lösungen gemäß den Transformationen 2 und 3 sollen dagegen nicht besprochen werden.

### 3. Die Lösungen der Blasiuschen Differentialgleichung

#### 3.1. Asymptotisches Verhalten

Wie in [9] gezeigt wird, streben alle reellen Lösungen von Gl. (5) in Abhängigkeit von der Wahl der Anfangswerte  $f_0, f'_0, f''_0$  mit wachsendem  $\eta$  asymptotisch einer der drei Lösungen (17), (18) oder (19) zu. Reelle Lösungen mit hiervon verschiedenen asymptotischen Formen existieren nicht.

Mit den asymptotischen Formen der Lösungen von Gl. (5) eng verknüpft ist das Problem ihrer Fortsetzbarkeit. Lösungen mit der asymptotischen Form (18) und (19) sind nach wachsendem  $\eta$  unbegrenzt fortsetzbar, während Lösungen mit der asymptotischen Form (17) über die singuläre Stelle  $\eta^*$  hinaus nicht fortsetzbar sind. Mit diesem Problem befaßt sich eine Arbeit von B. Punnis [10], in der die singuläre Stelle  $\eta^*$  für die Lösung von Gl. (5), die die Anfangswerte  $f_0 = f'_0 = 0$  und  $f''_0 = 1$  besitzt, berechnet wird. Es zeigt sich, daß die singuläre Stelle  $\eta^*$  in diesem Falle auf der negativen  $\eta$ -Halbachse liegt, d. h. daß diese Lösung nach links nur höchstens bis zur Stelle  $\eta^* \approx -3,12$  fortsetzbar ist. Dieselbe Lösung ist dagegen nach rechts, also mit wachsendem Argument  $\eta > 0$ , unbegrenzt fortsetzbar und strebt gegen die asymptotische Form (19).

Allgemein läßt sich die Fortschreitungsrichtung bezüglich der unabhängigen Variablen  $\eta$  auf Grund der Eigenschaft a) nach Abschnitt 2.3 umkehren, indem man die Konstante  $a = -1$  setzt. Dabei kehren sich die Vorzeichen von  $\eta, f$  und  $f''$  um, die Vorzeichen von  $f'$  und  $f'''$  dagegen nicht. Man erkennt, daß ein und dieselbe Lösung nach getroffener Wahl willkürlicher Anfangswerte  $f_0, f'_0$  und  $f''_0$  in einem willkürlich festgesetzten Nullpunkt  $\eta = 0$  für das Fortschreiten nach rechts ( $\eta > 0$ ) und nach links ( $\eta < 0$ ) jeweils einer der asymptotischen Formen (17), (18) oder (19) zustrebt. Es zeigt sich ferner, daß immer mindestens eine der zwei sich ergebenden asymptotischen Formen vom Typ (19) ist, während die jeweils zweite asymptotische Form, die durch Fortschreiten in entgegengesetzter Richtung erreicht wird, von einem der Typen (17), (18) oder (19) ist.

Zusammen mit den Eigenschaften a) und b) nach Abschnitt 2.3 folgt daraus, daß man sich zur Erfassung aller reellen Lösungen der Gl. (5) ohne Verlust der Allgemeinheit auf die Berechnung nur aller derjenigen Lösungen beschränken kann, die für  $\eta \rightarrow +\infty$  erstens die asymptotische Form (19) annehmen und zweitens auf Grund der Eigenschaft c) (Abschnitt 2.3) außerdem immer ein und demselben Wert  $f'(\eta \rightarrow +\infty) = 2$  zustreben. Das Verhalten der Lösungen bei Fortschreiten nach links ( $\eta < 0$ ) vom gewählten Ursprung aus wird in Abschnitt 3.3 aufgezeigt werden.

### 3.2. Numerische Berechnung der Lösungen

Um eine Übersicht über alle reellen Lösungen der Gl. (5) zu gewinnen, ist es nach den im vorigen Abschnitt dargestellten asymptotischen Eigenschaften erforderlich, nach Festlegung eines Nullpunktes  $\eta = 0$  sowie geeigneter Anfangswerte  $f_0$ ,  $f'_0$  und  $f''_0$  zunächst die Lösung nach rechts ( $\eta > 0$ ) so zu bestimmen, daß die Randbedingung  $f' \rightarrow 2$  für  $\eta \rightarrow \infty$  erfüllt wird. Diese Aufgabe bereitet keine Schwierigkeit, da auf die zahlreichen bekannten Lösungen, die im Zusammenhang mit den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Problemen bereits untersucht worden sind, zurückgegriffen werden kann. Im wesentlichen wurden dabei die in [3] und [7] zitierten Ergebnisse herangezogen.

Der zweite Schritt besteht darin, jeweils die Lösung ebenfalls nach links ( $\eta < 0$ ) zu berechnen, und zwar soweit, bis eine der drei möglichen asymptotischen Formen nach Gln. (17), (18) oder (19) erreicht wird.

Als numerisches Verfahren wurde das Runge-Kutta-Verfahren zur Lösung des sich aus Gl. (5) ergebenden Systems von drei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung angewandt. Durchgeführt wurden die Rechnungen auf dem Digitalrechner Siemens-2002 des Rechenzentrums der DFL, wobei ein vorhandenes Unterprogramm zur Lösung eines Systems gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen benutzt werden konnte.


Für solche Lösungen, die bei Fortsetzung nach links ( $\eta < 0$ ) der asymptotischen Form nach Gl. (17) zustreben, stellt der nicht bekannte Punkt  $\eta = \eta^*$  eine Singularität dar, deren Lage bestimmt werden muß. B. Punnis [10] hat zur numerischen Berechnung der singulären Stelle  $\eta^*$  ein einfaches Verfahren angegeben. Man berechnet die Lösung nach links bis zu einer Stelle  $\eta_i > \eta^*$  und ermittelt dann aus den Werten  $f'(\eta_i)$ ,  $f'(\eta_i)$ ,  $f''(\eta_i)$  die Größen  $\eta_1^*$ ,  $\eta_2^*$  und  $\eta_3^*$  entsprechend den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} f(\eta_i) &= \frac{3}{\eta_i - \eta_1^*} \\ f'(\eta_i) &= \frac{-3}{(\eta_i - \eta_2^*)^2} \\ f''(\eta_i) &= \frac{6}{(\eta_i - \eta_3^*)^3} \end{aligned} \right\}. \quad (28)$$

Man erhält drei voneinander verschiedene Werte  $|\eta_1^*|$ ,  $|\eta_2^*|$  und  $|\eta_3^*|$ . Nach [9] kann man zeigen, daß der gesuchte Wert von  $|\eta^*|$  zwischen dem kleinsten (Minimum) und dem größten (Maximum) der drei Werte  $|\eta_1^*|$ ,  $|\eta_2^*|$  und  $|\eta_3^*|$  liegt. Mit immer besserer Annäherung von  $\eta_i$  an die Stelle  $\eta^*$  rücken Minimum und Maximum immer näher aneinander, d. h. die singuläre Stelle  $\eta^*$  kann auf diese Weise beliebig genau berechnet werden.

In Tabelle 1 wird eine Übersicht über alle berechneten Lösungen durch Angabe der Anfangswerte  $f_0$ ,  $f'_0$  und  $f''_0$  gegeben. Wie im vorigen Abschnitt festgestellt wurde, existieren drei Typen von Lösungen, die sich durch ihr asymptotisches Verhalten bei Fortsetzung der Lösung nach links ( $\eta < 0$ ) voneinander unterscheiden. Der jeweilige Typ der Lösung ist in Tabelle 1 in der letzten Spalte verzeichnet.

Tabelle 1. Anfangswerte  $f_0$ ,  $f'_0$ ,  $f''_0$ , singuläre Stelle  $\eta^*$  und Typ der berechneten Lösungen

$f_0$	$f'_0$	$f''_0$	$\eta^*$	Typ
—1,237696	0	0,000140	—	 (I)
—1,236354	0	0,000429	—	
—1,235189	0	0,000709	—	
—1,234057	0	0,000998	—	
—1,228682	0	0,002542	—	
—1,218797	0	0,005883	—	
—1,209409	0	0,009486	—	
—1,200004	0	0,013430	—220,36327	
—1,190273	0	0,017812	—	
—1,180607	0	0,022435	—	
—1,170319	0	0,017623	—	
—1,160289	0	0,032925	—	
—1,149995	0	0,038600	—	
—1,099998	0	0,069120	—39,53446	
—1,049997	0	0,103829	—25,33213	
—1,000006	0	0,142073	—17,88434	
—0,949999	0	0,183440	—13,58475	
—0,900004	0	0,227584	—10,92809	
—0,850002	0	0,274271	—9,148331	
—0,800003	0	0,323284	—7,896338	
—0,750002	0	0,374453	—6,977980	
—0,700003	0	0,427626	—6,270834	
—0,650002	0	0,482675	—5,699405	
—0,600001	0	0,539482	—5,248144	
—0,550001	0	0,597942	—4,870400	
—0,500001	0	0,657963	—4,547702	
—0,450000	0	0,719460	—4,272649	
—0,400000	0	0,782352	—4,038221	
—0,350000	0	0,846572	—4,833688	
—0,300000	0	0,912051	—3,642950	
—0,250001	0	0,978728	—3,474219	
—0,200001	0	1,046547	—3,335126	
—0,150000	0	1,115456	—3,191744	
—0,100000	0	1,185403	—3,072975	
—0,050000	0	1,256342	—2,966927	
0,000000	0	1,328230	—2,866154	
0,050000	0	1,401025	—2,769459	
0,100000	0	1,474690	—2,681977	
0,150000	0	1,549187	—2,596021	
0,200000	0	1,624482	—2,520755	

Noch: *Tabelle 1*

$f_0$	$f'_0$	$f''_0$	$\eta^*$	Typ
0,250000	0	1,700543	— 2,446649	(I)
0,300000	0	1,777337	— 2,384741	
0,350000	0	1,854836	— 2,323188	
0,400000	0	1,933014	— 2,268159	
0,450000	0	2,011841	— 2,216146	
0,500000	0	2,091294	— 2,164515	
0,600000	0	2,251982	— 2,068556	
0,700000	0	2,414899	— 1,983692	
0,800000	0	2,579884	— 1,905797	
0,900001	0	2,746788	— 1,835766	
1,000001	0	2,915476	— 1,767790	
1,100001	0	3,085825	— 1,708649	
1,200000	0	3,257721	— 1,654238	
1,300004	0	3,431068	— 1,605603	
1,400002	0	3,605755	— 1,557023	
1,500002	0	3,781704	— 1,514154	
1,999996	0	4,677675	— 1,333228	
3,000003	0	6,528921	— 1,089778	
3,999995	0	8,429569	— 0,933515	
5,000015	0	10,359690	— 0,819980	
6,000002	0	12,308310	— 0,736653	(II)
10,000033	0	20,194300	— 0,533709	
0	1,174540	0,798828		(III)
0	1,229736	0,754388		
0	1,294799	0,700213		
0	1,367467	0,637473		
0	1,446267	0,566845		
0	1,530100	0,488823		
0	1,618107	0,403807		
0	1,709603	0,312136		
0	1,804035	0,214106		
0	1,900956	0,109982		
0	2,112173	—0,128813		
0	2,255044	—0,299223		
0	2,442289	—0,532962		
0	2,696845	—0,868854		
0	3,060200	—1,382601		
0	3,615667	—2,240652		
0	4,558222	—3,879539		

### 3.3. Darstellung in der $f' - f$ -Ebene

Eine interessante und zusammenfassende Übersicht über die Lösungen vermittelt Abb. 2. Aufgetragen sind verschiedene Lösungen  $f'$  über  $f$  in einer

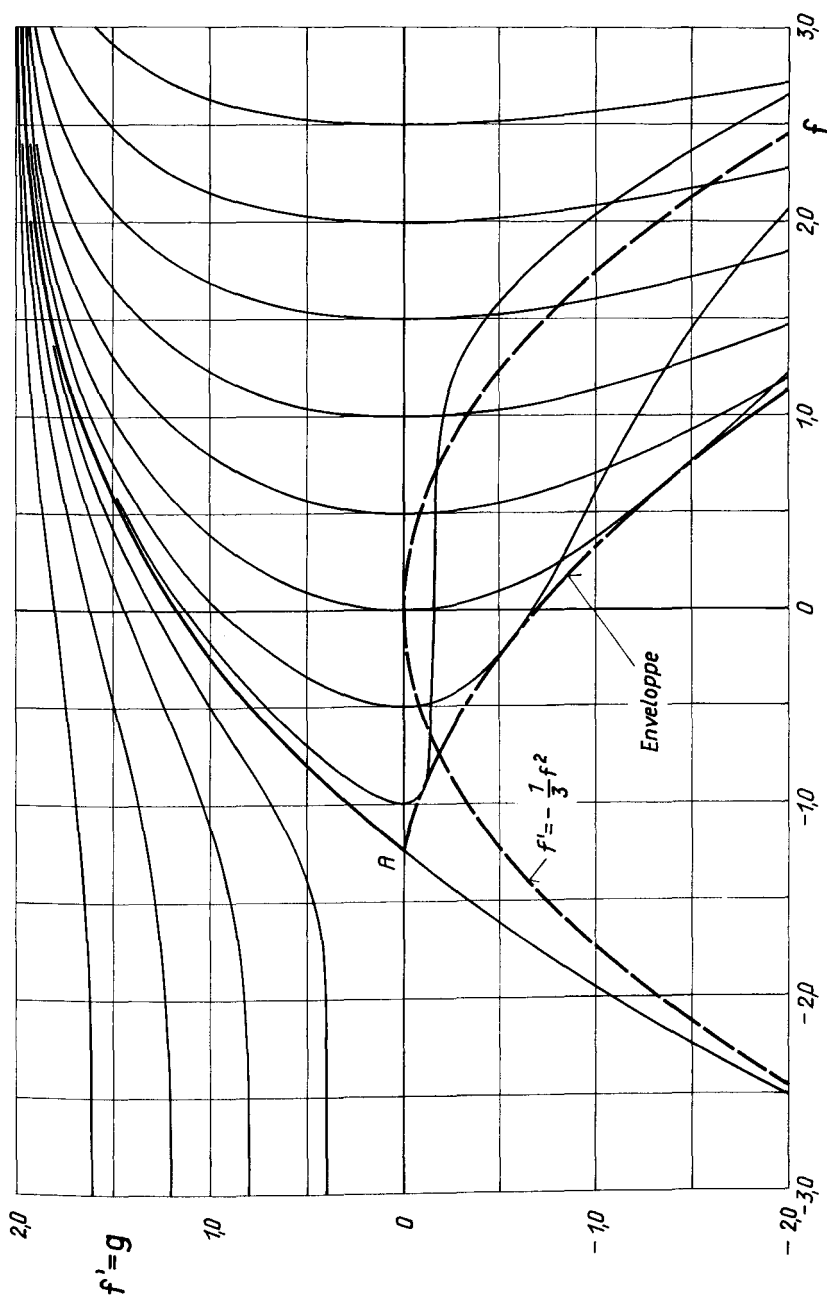


Abb. 2. Die Lösungen in der  $f' - f$ -Ebene

Darstellung, die der transformierten Differentialgleichung (20) entspricht. In der positiven Halbebene  $f' > 0$  münden mit wachsendem  $f > 0$  alle Lösungen in die Horizontale  $f' = 2$ . Eine Fortsetzung in die negative Halbebene  $f' < 0$  ist nur denjenigen Lösungen möglich, die mit senkrechter Tangente die Abszisse schneiden. Diese Lösungen gehören alle zu dem Typ I. Ihr weiteres Verhalten bei Fortschreiten in die negative Halbebene  $f' < 0$  ist dadurch gekennzeichnet, daß sie nach Umkehrung ihrer Richtung auf der Abszisse  $f' = 0$  eine Enveloppe bilden, um sich dann dem rechten Ast der exakten Lösung  $f' = -1/3 f^2$  gemäß Gl. (21a) asymptotisch zu nähern. Das Gebiet mit  $f' < 0$  rechts von der Enveloppe wird von den Lösungen des Typs I doppelt belegt.

Die Lösungen vom Typ III sind diejenigen, für die  $f'$  stets positiv bleibt. Bei Fortschreiten von der Ordinate  $f = 0$  nach links ( $f < 0$ ) münden sie alle jeweils in eine Horizontale. Ihr asymptotisches Verhalten nach links ist also das gleiche wie nach rechts.

Die Bereiche der Lösungen vom Typ I und Typ III werden getrennt durch eine einzige ausgezeichnete Lösung vom Typ II, die mit endlicher Tangente

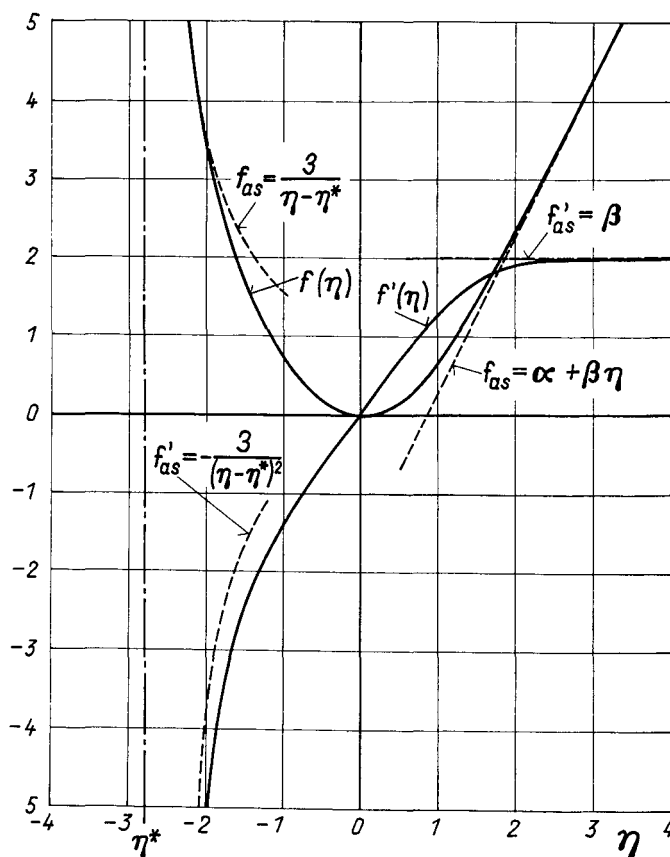


Abb. 3. Die Lösung von  $f''' + f f'' = 0$  mit den Anfangswerten  $f_0 = 0$ ,  $f'_0 = 0$ ,  $f''_0 = 1,3228$  als Beispiel für den Lösungstyp I. (--- Asymptoten;  $\eta^* = -2,8662$ ,  $\alpha = -1,7208$ ,  $\beta = 2,0$ )

in den Punkt  $f = f^* = -1,238496$ ,  $f' = 0$  einmündet. Dieser Punkt ist in Abb. 9 mit A bezeichnet, er entspricht dem Grenzübergang  $\eta \rightarrow -\infty$  mit den Grenzwerten  $f(-\infty) = -1,238496$ ,  $f'(-\infty) = 0$  und  $f''(-\infty) = 0$ . Eine Fortsetzung der ausgezeichneten Lösung in die negative Halbebene  $f' < 0$ , wie sie in Abb. 2 angegeben ist, ist demnach durch Lösen von Gl. (5), d. h. mit  $\eta$  als unabhängiger Variablen nicht möglich. Wohl aber läßt die transformierte Gleichung (20) eine Fortsetzung in diesen Bereich zu, wie weiter unten in Abschnitt 3.4 gezeigt werden soll.

In Abb. 3 sind als Beispiel für eine Lösung des Typs I die Funktionen  $f(\eta)$  und  $f'(\eta)$  für die Anfangswerte  $f_0 = f'_0 = 0$  und  $f''_0 = 1,32823$  zusammen mit den entsprechenden asymptotischen Kurven aufgetragen. Die entsprechenden Funktionen für Beispiellösungen der Typen II und III sind in den Abb. 4 und 5 dargestellt.

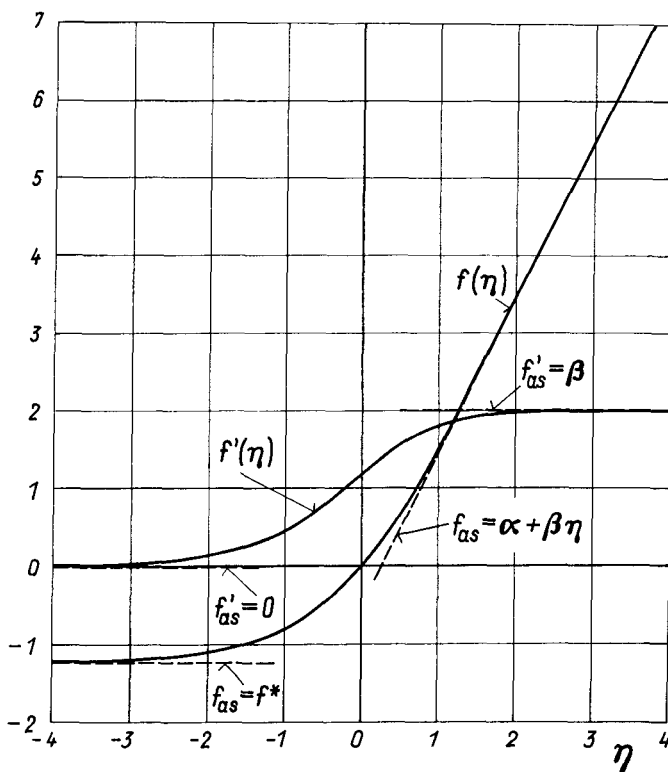


Abb. 4. Die Lösung von  $f''' + f f'' = 0$  mit den Anfangswerten  $f_0 = 0$ ,  $f'_0 = 1,1745$ ,  $f''_0 = 0,7988$  als Beispiel für den Lösungstyp II. (--- Asymptoten;  $\alpha = -0,5289$ ,  $\beta = 2,0$ ,  $\beta_1 = -1,2385$ )

Die Berechnung der Enveloppe (Abb. 2) erfordert die Kenntnis der Abhängigkeit der Lösungskurven  $f'(f)$  von dem Parameter  $f_0$ , d. h. dem Funktionswert  $f$  bei  $f' = 0$ . Für die zu einer gegebenen Lösung  $f_I(\eta)$  benachbarte Lösung  $f_{II}(\eta)$  wurde der Ansatz

$$f_{II}(\eta) = f_I(\eta) + \Delta f_0 \cdot f_z(\eta) \quad (29)$$

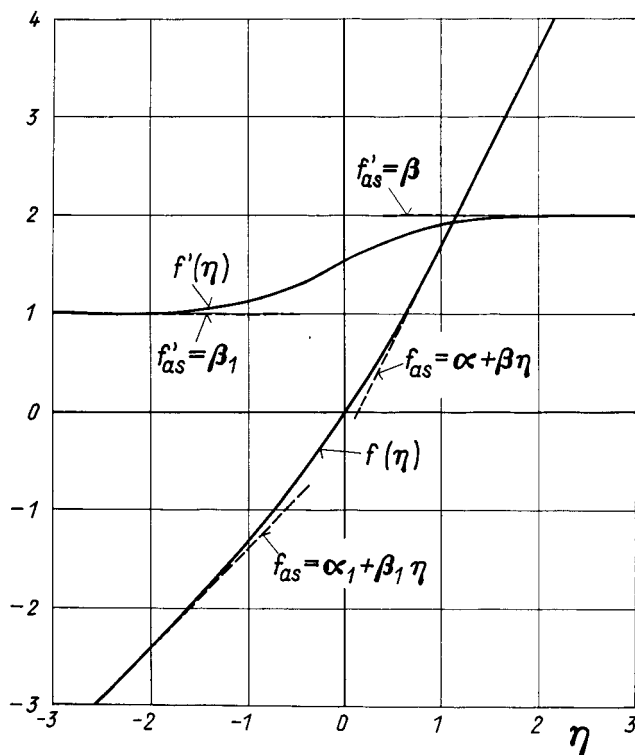


Abb. 5. Die Lösung von  $f''' + f f'' = 0$  mit den Anfangswerten  $f_0 = 0$ ;  $f'_0 = 1,5301$ ,  $f''_0 = 0,4888$  als Beispiel für den Lösungstyp III. (--- Asymptoten;  $\alpha = -0,2837$ ,  $\beta = 2,0$ ,  $\alpha_1 = -0,3739$ ,  $\beta_1 = 1,0$ )

mit  $\Delta f_0 = f_{I_0} - f_{I_0}$  gemacht. Dies bedeutet, daß man bei vorausgesetzter Kenntnis der Abweichungsfunktion  $f_z(\eta)$  für einen genügend kleinen Wert des Parameters  $\Delta f_0$  eine zu  $f_I(\eta)$  benachbarte Lösung erhält, in die die Abhängigkeit vom Anfangswert  $f_0$  über den Parameter  $\Delta f_0$  explizit eingeht. Der Ansatz Gl. (29) wird in die Blasiusgleichung (5) eingesetzt, wobei Glieder mit  $(\Delta f_0)^2$  vernachlässigt werden. Unter Berücksichtigung, daß  $f_I(\eta)$  eine Lösung von Gl. (5) ist, also die Gleichung

$$f_I''' + f_I f_I'' = 0 \quad (30)$$

erfüllt, erhält man für die Abweichungsfunktion  $f_z(\eta)$  die folgende lineare Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$f_z''' + f_I f_z'' + f_I' f_z = 0. \quad (31)$$

Die Randbedingungen können sämtlich als Anfangswerte bei  $\eta = 0$  angegeben werden:

$$f_{z0} = 1; \quad f'_{z0} = 0; \quad f''_{z0} = \left( \frac{df_0''}{df_0} \right)_{(f_0 = f_{I_0})}. \quad (32)$$



In Abb. 6, das eine schematische Darstellung des interessierenden Teils der Funktionsverläufe in der  $f - f'$ -Ebene wiedergibt, ist die Bedeutung der Abweichungsfunktion  $f_z(\eta)$  geometrisch veranschaulicht. Ein Punkt  $\hat{A}$  auf der Kurve  $f'_{II}$  ist durch  $f_z$  und  $f'_z$  und den Parameter  $\Delta f_0$  eindeutig einem Punkt  $A$  der Kurve  $f'_I$  zugeordnet. Aus dieser Darstellung kann man nun unmittelbar ein Kriterium für den Punkt  $E$  auf der Kurve  $f'_I$  angeben, der auf der Enveloppe liegt. Die Tangente der Kurve  $f'_I$  im Punkt  $E$  muß mit der Steigung der Verbindungsgeraden  $E \hat{E}$  übereinstimmen, d. h. es muß gelten:

$$\left( \frac{df'_I}{df} \right)_E = \left( \frac{\Delta f_0 \cdot f'_z}{\Delta f_0 \cdot f_z} \right)_E = \left( \frac{f'_z}{f_z} \right)_E,$$

oder

$$\left( \frac{f'_z}{f_z} \right)_E = \left( \frac{f'_{II}}{f_I} \right)_E. \quad (33)$$

Die nach diesem Kriterium durch numerische Lösung des Gleichungssystems (30) und (31) mit den Randbedingungen (32) gewonnene Kurve der Enveloppe ist in Tabelle 2 wiedergegeben und in Abb. 2 mit eingezeichnet. Auf die Folgerungen, die sich aus der Existenz der Enveloppe ergeben, wird in Abschnitt 4.2 eingegangen werden.

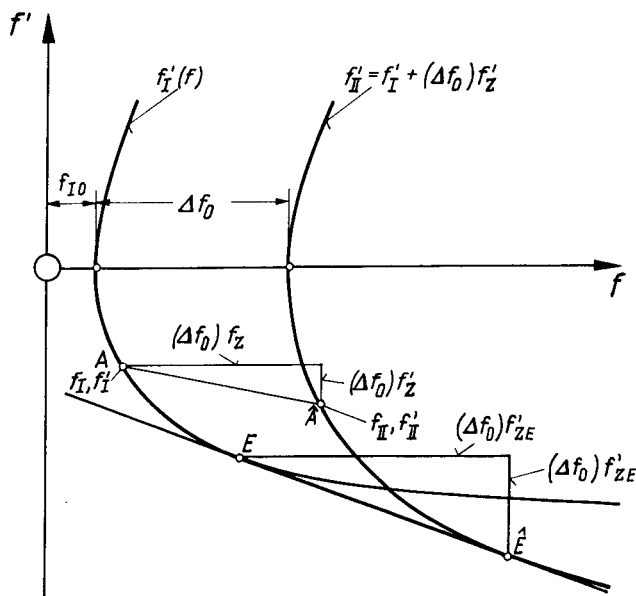


Abb. 6. Veranschaulichung der Bedingung für einen Punkt auf der Enveloppe nach Gl. (33)

Tabelle 2. Werte  $f_E$ ,  $f'_E$  und  $f''_E$  der Enveloppe nach Bild 2 in Abhängigkeit vom Anfangswert  $f_0$  der zugehörigen Lösungskurve

$f_0$	$f_E$	$f'_E$	$f''_E$
—1,23770	—1,23756	— 0,000103	0,000012
—1,23635	—1,23596	— 0,000312	0,000043
—1,23519	—1,23456	— 0,000513	0,000076
—1,23406	—1,23320	— 0,000719	0,000111
—1,22868	—1,22665	— 0,001811	0,000318
—1,21880	—1,21447	— 0,004141	0,000839
—1,20941	—1,20278	— 0,006635	0,001472
—1,20000	—1,19097	— 0,009355	0,002224
—1,19027	—1,17867	— 0,012373	0,003119
—1,18061	—1,16637	— 0,015556	0,004122
—1,17032	—1,15320	— 0,019132	0,005312
—1,16029	—1,14029	— 0,022792	0,006591
—1,15000	—1,12697	— 0,026723	0,008020
—1,10000	—1,06136	— 0,048070	0,016715
—1,05000	—0,994539	— 0,072814	0,028428
—1,00001	—0,926537	— 0,100753	0,043294
—0,949999	—0,857377	— 0,131800	0,061552
—0,900005	—0,787134	— 0,165900	0,083462
—0,850001	—0,715794	— 0,203074	0,109340
—0,800003	—0,643385	— 0,243344	0,139521
—0,750002	—0,569896	— 0,286771	0,174388
—0,700003	—0,495331	— 0,333425	0,214353
—0,650002	—0,419676	— 0,383395	0,259874
—0,600001	—0,342923	— 0,436781	0,311445
—0,550001	—0,265065	— 0,493691	0,369605
—0,500001	—0,186086	— 0,554251	0,434941
—0,450000	—0,105971	— 0,618594	0,508094
—0,400000	—0,0247067	— 0,686861	0,589752
—0,350000	0,0577245	— 0,759205	0,680665
—0,300000	0,141338	— 0,835789	0,781643
—0,250001	0,226150	— 0,916782	0,893561
—0,200000	0,312179	— 1,00237	1,01737
—0,150000	0,399441	— 1,09273	1,15407
—0,100000	0,487951	— 1,18808	1,30478
—0,050000	0,577728	— 1,28861	1,47067
0,000000	0,668786	— 1,39454	1,65300
0,050000	0,761144	— 1,50609	1,85315
0,100000	0,854815	— 1,62351	2,07255
0,150000	0,949814	— 1,74703	2,31279
0,200000	1,04616	— 1,87690	2,57551

Noch: *Tabelle 2*

$f_0$	$f_E$	$f'_E$	$f''_E$
0,250000	1,14386	— 2,01338	2,86252
0,300000	1,24293	— 2,15674	3,17569
0,350000	1,34338	— 2,30726	3,51707
0,400000	1,44523	— 2,46522	3,88881
0,450000	1,54847	— 2,63089	4,29319
0,500000	1,65317	— 2,80465	4,73273
0,600000	1,86684	— 3,17748	5,72753
0,700000	2,08618	— 3,58602	6,89526
0,800000	2,31131	— 4,03301	8,26110
0,900001	2,54225	— 4,52113	9,85269
1,00000	2,77896	— 5,05308	11,7003
1,10000	3,02147	— 5,63175	13,8374
1,20000	3,26973	— 6,25992	16,3003
1,30000	3,52368	— 6,94050	19,1285
1,40000	3,78324	— 7,67625	22,3640
1,50000	4,04869	— 8,47116	26,0570
2,00000	5,45429	—13,4128	53,1277
2,50000	6,97523	—20,1874	99,9495
3,00000	8,59299	—29,0648	175,153
4,00000	12,0329	—53,7858	449,237
5,00001	15,6395	—88,3509	955,761
6,00000	19,3357	—13,3025	1776,65

### 3.4. Potenzreihenentwicklungen

Die Entwicklung der Lösungen vom Typ I um ihren jeweiligen Anfangspunkt  $f_0$ ,  $f'_0$  und  $f''_0$  in eine Potenzreihe der Form

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n \quad (34)$$

ist leicht anzugeben. Durch Einsetzen des Ansatzes (34) in Gl. (5) und Koeffizientenvergleich erhält man für die Koeffizienten

$$a_0 = f_0, \quad a_1 = f'_0, \quad a_2 = \frac{1}{2} f''_0.$$

Die Koeffizienten höherer Glieder der Entwicklung können sukzessive durch die folgende Formel gewonnen werden:

$$a_n = -\frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=2}^{n-1} i(i-1) a_i a_{n-i-1} \quad (35)$$

für  $n \geq 3$ .

Die Entwicklung der Lösungen vom Typ I in der Form  $f' = g = g(f)$  mit  $f$  als unabhängiger Variablen ist durch Einführen eines geeigneten Ansatzes für die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung  $g(f)$  in die transformierte Differentialgleichung (20) möglich. Gl. (20) läßt sich auch schreiben als

$$(g \dot{g})' + \dot{g}(f - f_0) + \dot{g}f_0 = 0. \quad (36)$$

Eine entsprechende Potenzreihenentwicklung um die Anfangswerte  $g = 0$ ,  $f = f_0$  lautet nach [5] (siehe auch [11]):

$$g = A_0 (f - f_0)^{1/2} + A_1 (f - f_0) + A_2 (f - f_0)^{3/2} + \dots \\ \dots + A_n (f - f_0)^{(n+1)/2} + \dots \quad (37)$$

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (36) und Koeffizientenvergleich können die Koeffizienten  $A_n$  nacheinander berechnet werden. Es ergibt sich

$$A_0 > 0 \text{ beliebig}, \quad A_1 = -\frac{2}{3} f_0, \\ A_2 = \frac{1}{9 A_0} f_0^2, \quad A_3 = -\frac{2}{15} + \frac{4}{135} \frac{f_0^3}{A_0^2}$$

bzw. die Formel:

$$A_n = -\frac{2}{(n+2) A_0} \left[ \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{n-1} (i+1) A_i A_{n-i} \right) + \frac{n+2}{n} A_{n-3} + A_{n-1} f_0 \right] \quad (38)$$

für  $n \geq 3$ . In der Reihenentwicklung nach Gl. (37) bleibt als einziger freier Parameter der Koeffizient  $A_0$  übrig. Seine Bedeutung gewinnt man durch Bildung von

$$(g \dot{g})_{(f=f_0)} = f_0'' = \frac{1}{2} A_0^2,$$

also

$$A_0 = \sqrt{2 f_0''}. \quad (39)$$

Die Potenzreihenentwicklung der ausgezeichneten Lösung vom Typ II mit  $f_0 = f^*$  ist in dem Ansatz (37) nicht enthalten. Da in diesem Falle  $f_0'' = 0$  ist, wird der Ansatz

$$g = a_1 (f - f^*) + a_2 (f - f^*)^2 + \dots + a_n (f - f^*)^n + \dots \quad (40)$$

nahegelegt. Man findet durch Einsetzen in Gl. (36) und Koeffizientenvergleich

$$a_1 = -f^*, \quad a_2 = -\frac{1}{4}, \quad a_3 = -\frac{1}{72 f^*}$$

und alle weiteren Koeffizienten nach der Formel:

$$a_n = \frac{1}{n f^*} \left[ \left( \sum_{i=2}^{n-1} (n+1-i) a_{n+1-i} \cdot a_i \right) + \frac{n-1}{n} a_{n-1} \right] \quad (41)$$

für  $n \geq 3$ . Ausführlich lautet damit die Reihenentwicklung für die ausgezeichnete Lösung mit  $f^* = -1,238496$  bis einschließlich des dritten Gliedes:

$$g(f) \equiv f' = 1,238496 (f + 1,238496) - 0,25 (f + 1,238496)^2 + 0,011214 (f + 1,238496)^3.$$

Für  $f = 0$  ergibt sich  $g(0) = 1,17171$ , ein Wert, dessen Fehler gegenüber dem exakten Wert  $g(0) = 1,17454$  weniger als 0,3 % beträgt.

Wie bereits erwähnt, mündet die ausgezeichnete Lösung mit endlicher Tangente, nämlich mit

$$\dot{g}(f^*) = -f^* = 1,238496$$

in den singulären Punkt  $A$  (Abb. 2) ein. In der nun vorliegenden Form der Reihenentwicklung nach Gl. (40) läßt sie sich ohne Schwierigkeit auch in den negativen  $f'$ -Bereich hinein fortsetzen (siehe Abb. 2), was durch Lösen der ursprünglichen Gl. (5) mit  $\eta$  als unabhängiger Veränderlichen nicht möglich ist. Der Vollständigkeit halber möge noch die Reihenentwicklung der Lösung der Differentialgleichung (20) bzw. (36) um einen beliebigen Punkt angegeben werden, in dem die Anfangswerte  $f_a$ ,  $g_a \neq 0$  und  $\dot{g}_a$  bekannt sind. Mit dem Ansatz

$$g = b_0 + b_1 (f - f_a) + b_2 (f - f_a)^2 + \dots + b_n (f - f_a)^n + \dots \quad (42)$$

erhält man durch Einsetzen in Gl. (36) und Koeffizientenvergleich

$$b_0 = g_a, \quad b_1 = \dot{g}_a, \quad b_2 = -\frac{\dot{g}_a}{2 g_a} (f_a + \dot{g}_a)$$

oder

$$b_n = -\frac{1}{n b_0} \left[ \left( \sum_{i=1}^{n-1} i b_i b_{n-i} \right) + \frac{n-2}{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} f_a \right] \quad (43)$$

für  $n \geq 2$ . Diese Reihenentwicklung kann prinzipiell dazu benutzt werden, um in schrittweiser Fortsetzung die gesamte Lösung zu berechnen. Damit ein solches Verfahren auch von einem Anfangspunkt  $f_a = f_0$ ,  $g_a = 0$  begonnen werden kann, muß jedoch im ersten Schritt die Reihenentwicklung (37) bzw. für den Fall der ausgezeichneten Lösung die Reihenentwicklung (40) benutzt werden.

### 3.5. Darstellung in der $X$ - $Y$ -Ebene

Eine Übersicht über die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$\frac{dY}{dX} = \frac{YX - Y - 2}{X^2 + Y - 1} \quad (27)$$

mit den Variablen  $X$  und  $Y$  nach Gln. (25) und (26) vermittelt Abb. 7. Die ausgezogenen Kurven entsprechen dabei den Lösungen der Differentialgleichung (5) und sind durch ihren jeweiligen Anfangswert  $f_0$  gekennzeichnet. Die auftretenden Singularitäten sind mit  $S_1$  (erster Sattelpunkt),  $S_2$  (zweiter

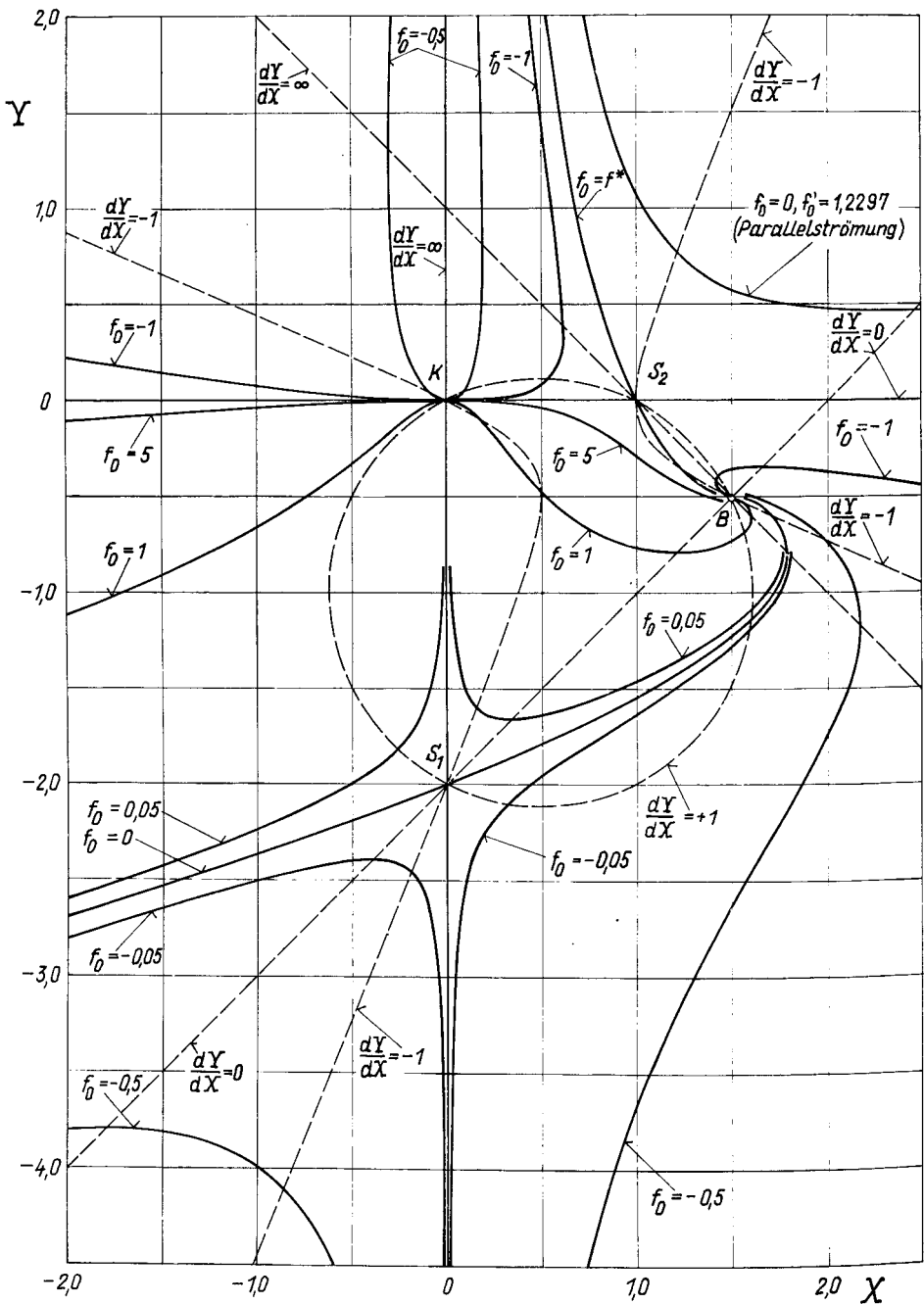


Abb. 7. Die Lösungen in der X-Y-Ebene

Sattelpunkt),  $K$  (Knotenpunkt) und  $B$  (Strudelpunkt) bezeichnet. Die gestrichelten Linien verbinden Punkte konstanter Ableitung  $dY/dX = \text{konst}$  nach Gl. (27). Danach ergibt sich für

$\frac{dY}{dX} = 0$  erstens eine Gerade durch die Singularitäten  $S_1$  und  $B$  und zweitens die Abszissenachse  $Y = 0$ ,

$\frac{dY}{dX} = \infty$  erstens eine Gerade durch die Singularitäten  $S_2$  und  $B$  und zweitens die Ordinatenachse  $X = 0$ ,

$\frac{dY}{dX} = 1$  ein Kreis mit den Mittelpunktskoordinaten  $X_M = 1/2$  und  $Y_M = -1$ , der durch alle vier Singularitäten hindurchgeht,

$\frac{dY}{dX} = -1$  eine Hyperbel mit den Mittelpunktskoordinaten  $X_M = 3/4$  und  $Y_M = 1/4$ , die ebenfalls durch alle Singularitäten hindurchgeht.

Von besonderer Bedeutung ist die Singularität  $B$ , der Strudelpunkt an der Stelle  $X_B = 3/2$ ,  $Y_B = -1/2$ . Alle Lösungskurven laufen in ihm spiralartig zusammen. In der  $f' - f$ -Ebene entspricht  $B$  der exakten Lösung  $f' = -1/3 f^2$

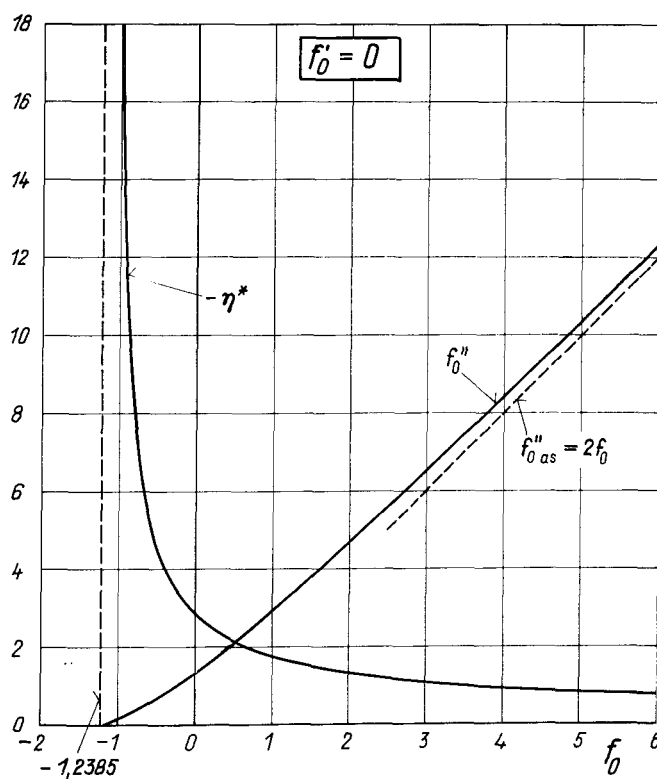


Abb. 8. Anfangswert  $f_0''$  und singuläre Stelle  $\eta^*$  in Abhängigkeit vom Anfangswert  $f_0$  für den Lösungstyp I ( $f_0' = 0$ )

und in der  $\eta - f$ -Ebene der Lösung  $f = 3/(\eta - \eta^*)$ . Dem spiralartigen Aufwickeln aller Lösungen im Strudelpunkt  $B$  entspricht in der  $f' - f$ -Ebene nach Abb. 2 die Annäherung aller Lösungen des Typs I an den rechten Ast der Parabel  $f' = -1/3 f^2$ , wobei aber jede Lösungskurve die Parabel beliebig oft schneidet. In der  $\eta - f$ -Ebene entspricht das der Annäherung der Kurven  $f(\eta)$  und  $f'(\eta)$  an die singuläre Stelle  $\eta^*$ . Der Wert von  $\eta^*$  ist für die verschiedenen Anfangswerte  $f_0, f'_0, f''_0$  in Tabelle 1 mit angegeben und in Abb. 8 dargestellt. Auch der in den negativen  $f'$ -Bereich fortgesetzte Teil der ausgezeichneten Lösung zeigt das gleiche asymptotische Verhalten mit dem Unterschied, daß die Annäherung hier an den linken Ast der Parabel  $f' = -1/3 f^2$  erfolgt (Abb. 2). Dem entspricht in der  $X - Y$ -Ebene (Abb. 7) der von  $S_2$  nach  $B$  verlaufende Teil der Trennkurve durch  $S_2$ .

## 4. Diskussion der physikalisch interpretierbaren Lösungen

### 4.1. Lösungen mit $f'_0 \geq 0$

Es soll nun an Hand der Lösungskurven in der  $f' - f$ -Ebene nach Abb. 2 zusammenfassend erörtert werden, welche dieser Lösungen den in Abschnitt 2.2 aufgezählten physikalisch sinnvollen Grenzschichtströmungen nach Abb. 1 entsprechen und ob gegebenenfalls darüber hinaus weitere physikalisch sinnvolle Lösungen existieren.

Grundsätzlich kann in der Halbebene  $g = f' \geq 0$  nach Abb. 2 jeder Punkt als Anfangspunkt ( $\eta = 0$ ) einer physikalisch deutbaren Lösung dienen. Bezeichnet man wie üblich diese Anfangswerte mit  $f_0$  und  $f'_0$ , zu denen noch ein fester  $f''_0$ -Wert gehört, und ordnet man diesen Anfangswerten den dimensionslosen Wandabstand  $\eta = 0$  zu, so ist die physikalisch sinnvolle Grenzschichtlösung durch den Teil der Lösungskurve  $f' = f'(f)$  bestimmt, der vom Punkt  $f_0, f'_0$  ausgehend, dem Wert  $f' = 2$  für wachsendes  $f$  zustrebt. So stellt z. B. die Lösungskurve, die durch den Ursprung hindurchgeht, die also die Anfangswerte  $f_0 = 0, f'_0 = 0$  besitzt, die Blasiusche Plattengrenzschicht nach Abb. 1, Skizze a dar. Lösungskurven, die von der Abszissenachse ausgehen, d. h. die Anfangswerte  $f_0 > 0, f'_0 = 0$  besitzen, stellen die Plattengrenzschicht mit Absaugung und diejenigen mit  $-1,238496 < f_0 < 0$  und  $f'_0 = 0$  die Plattengrenzschichten mit Ausblasen nach Bild 1, Skizze b dar.

Die Grenzschichtströmung über eine halbumendlich lange ebene Platte mit bewegtem, aber undurchlässigem Boden nach Abb. 1, Skizze c wird durch diejenigen Lösungskurven in Abb. 2 repräsentiert, die von der Ordinatenachse ausgehen, also Anfangswerte  $f_0 = 0, f'_0 > 0$  besitzen, wobei die Bodengeschwindigkeit  $u_0$  durch  $u_0 = 1/2 U_\infty f'_0$  gegeben ist. Einbegriffen hierin sind auch die Fälle, in denen die Bodengeschwindigkeit  $u_0$  größer als die Außengeschwindigkeit  $U_\infty$  ist. Diese Fälle werden durch die Lösungskurven erfaßt, die ausgehend von einem Wert  $f'_0 = f'_{0\lambda}$  mit  $1,17454 < f'_{0\lambda} \leq 2$  nach links verlaufen und sich asymptotisch einem festen Wert  $f'(-\infty) = 2\lambda$  nähern. Da die Zuordnung zwischen  $f'_{0\lambda}$  und  $\lambda$  fest gegeben und bekannt ist, kann man die Anfangswerte  $f_{0\lambda} = 0, f'_{0\lambda}$  und  $f''_{0\lambda}$  mittels der Formeln (16) auf entsprechende Anfangswerte so umrechnen, daß auch für diese Fälle mit  $u_0 > U_\infty$  erstens der Wandabstand  $\eta$  positiv gezählt wird und zweitens das Erreichen der



Außengeschwindigkeit  $U_\infty$  ebenfalls durch den Übergang  $f' \rightarrow 2$  gekennzeichnet ist. Die Umrechnungsformeln hierfür lauten:

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} f_{0\lambda} \\ f'_0 &= \frac{1}{\lambda} f'_{0\lambda} \\ f''_0 &= -\frac{1}{\lambda \sqrt{\lambda}} f''_{0\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (44).$$

Eine besondere Rolle spielt als Grenzfall der zu  $\lambda = 0$  gehörige Teil der ausgezeichneten Lösung mit  $f < 0$  und deren Anfangswerten  $f_0 = 0$ ,  $f'_0 = 1,17454$  und  $f''_0 = 0,79883$ . Diese Lösung kann durch Elimination der Konstanten  $U_\infty$  mittels der Beziehung

$$u_0 = \frac{1}{2} U_\infty f'_0 = \frac{1}{2} \cdot 1,17454 U_\infty \quad (45)$$

auf eine Form transformiert werden, daß die Geschwindigkeitsverteilung  $u(y)$  auf die Wandgeschwindigkeit  $u_0$  bezogen ist und der Wandabstand  $\xi$  positiv gezählt wird. Unter Berücksichtigung der Beziehungen (3), (4), (6) und (8) erhält man

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{\frac{u_0}{2 \nu x}} y = \sqrt{\frac{2 u_0}{U_\infty}} (-\eta) = \sqrt{1,17454} \cdot (-\eta) \\ F(\xi) &= \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{2 \nu u_0 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1,17454}} \cdot f(-\eta) \\ F'(\xi) &= \frac{u}{u_0} = \frac{1}{1,17454} f'(-\eta) \\ F''(\xi) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{u_0 \sqrt{\frac{u_0}{2 \nu x}}} = -\frac{1}{(1,17454)^{3/2}} \cdot f''(-\eta). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

In dieser Form stellt die Lösung  $F'(\xi) = u/u_0$  das Geschwindigkeitsprofil dar, das in einer ruhenden Flüssigkeit durch Bewegen des Bodens einer halbbunendlich langen Platte mit der Geschwindigkeit  $u_0$  in  $x$ -Richtung entsteht. Diese Grenzschichtströmung ist in Abb. 9, Skizze a schematisch skizziert.

Werden in der  $f' - f$ -Ebene die Anfangswerte  $f_0$  und  $f'_0$  beliebig gewählt, so entspricht die durch den so festgelegten Anfangspunkt verlaufende Lösungskurve der in Abb. 1, Skizze d dargestellte Fall der Plattengrenzschicht mit bewegtem Boden und Absaugung oder Ausblasen. Für den Fall  $u_0 > U_\infty$  gelten die oben angestellten Überlegungen mit der Verallgemeinerung, daß  $f_{0\lambda}$  und damit  $f_0$  (siehe Gleichungen 44) nun nicht mehr gleich Null sind. Die gleichzeitigen Bedingungen der bewegten Wand und des Absaugens oder Ausblasens können auch, wie bereits bemerkt, durch die Vorstellung eines schrägen

Absaugens bzw. Ausblasens ersetzt werden, wobei dann allerdings die Absaugrichtung mit der Lauflänge  $x$  veränderlich ist.

Werden die Anfangswerte  $f_0$  und  $f'_0$  auf der ausgezeichneten Lösung gewählt, so entspricht der zwischen diesem Anfangspunkt und dem kritischen Punkt  $A$  (siehe Abb. 2) verlaufende Teil der Lösungskurve dem allgemeineren Fall des in ruhender Luft bewegten Bodens mit Absaugen oder Ausblasen, der in Abb. 9, Skizze b veranschaulicht ist. Auch für diesen Fall können analog den Gleichungen (46) Umrechnungsformeln gewonnen werden, so daß die Geschwindigkeitsverteilung  $u$  stets auf die Bodengeschwindigkeit  $u_0$  bezogen ist.

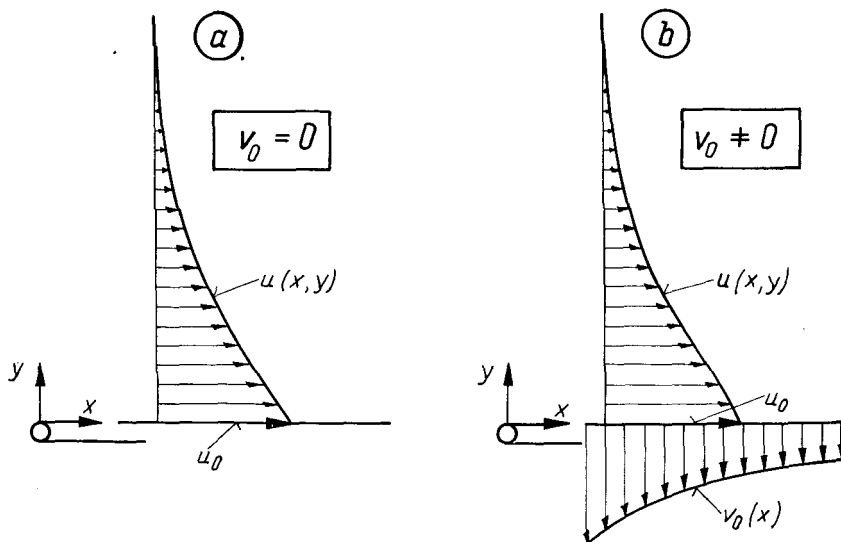


Abb. 9. Die Plattengrenzschicht bei bewegtem Boden in ruhender Flüssigkeit (schematisch)

Die Lösungen für die laminare Vermischung zweier Parallelströmungen nach Abb. 1, Skizze e werden in der  $f' - f$ -Ebene nach Abb. 2 durch die oberhalb der ausgezeichneten Lösung verlaufenden Lösungskurven dargestellt. Die ausgezeichnete Lösung stellt dabei den Spezialfall der über ruhende Flüssigkeit ( $U_{(-\infty)} = 0$ ) mit der konstanten Geschwindigkeit  $U_{(+\infty)} > 0$  strömenden Parallelströmung dar.

Wie bereits in Abschnitt 2.2 bemerkt wurde, bedeutet die Randbedingung (15a) eine willkürliche Festlegung der Nullstromlinie, die physikalisch nicht gerechtfertigt ist. Eine von *L. Ting* [8] durchgeführte Untersuchung zur Begründung einer physikalisch sinnvollen dritten Randbedingung geht von der Überlegung aus, daß die durch die Vermischung eintretende unterschiedliche Verdrängung der oberen und unteren Außenströmungen einen Druckgradienten quer zur Vermischungszone hervorruft und daß dieser Druckunterschied in eindeutiger Weise durch die Geschwindigkeitsverteilungen der  $u$ - und  $v$ -Komponenten in der Vermischungszone ausgeglichen sein muß. Zur mathematischen Formulierung dieser physikalisch sinnvollen dritten Randbedingung wird ein

Verfahren zur Anpassung der Grenzschichtlösung an die Außenströmungen verwendet, in dem die Grenzschichtdifferentialgleichungen der nächsthöheren Ordnung berücksichtigt werden. Es sei hier nur das Ergebnis der laminaren Vermischung zweier inkompressibler Parallelströmungen gleichen Mediums mitgeteilt. Die zu erfüllende dritte Randbedingung lautet danach:

$$U_{(+\infty)} \cdot v_{(+\infty)} = -U_{(-\infty)} \cdot v_{(-\infty)}, \quad (47)$$

wobei  $v_{(+\infty)}$  die Querkomponente der Geschwindigkeit am oberen und  $v_{(-\infty)}$  diejenige am unteren Rand der Vermischungszone sind. Wegen

$$U_{(-\infty)} = \lambda \cdot U_{(+\infty)}$$

und

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_{(\pm\infty)}}{x}} (\bar{\eta} f' - f)$$

folgt aus Gl. (47) die entsprechende dimensionslose Bedingung für den Fall der hier betrachteten ähnlichen Lösungen:

$$(\bar{\eta} f' - f)_{(\bar{\eta} \rightarrow +\infty)} = -\lambda (\bar{\eta} f' - f)_{(\bar{\eta} \rightarrow -\infty)}. \quad (48)$$

Man sieht, daß wegen des expliziten Auftretens der dimensionslosen Querkordinaten  $\bar{\eta}$  die Erfüllung der Bedingung Gl. (48) von der Wahl des Nullpunktes der Variablen  $\bar{\eta}$  abhängig ist. Die Variable  $\bar{\eta}$  wird sich von der bisher benutzten Variablen  $\eta$ , deren Nullpunkt durch die willkürliche Festlegung nach Gl. (15a), nämlich daß  $f = 0$  für  $\eta = 0$  ist, gegeben ist, um einen additiven konstanten Betrag unterscheiden

$$\bar{\eta} = \eta + \bar{a}. \quad (49)$$

Da eine solche Nullpunktverschiebung nach Abschnitt 2.2 die Lösung von Gl. (5) nicht beeinflußt, kann aus den bereits ermittelten Lösungen mit  $f = 0$  bei  $\eta = 0$  jeweils die Konstante  $\bar{a}$  bestimmt werden. Durch Einsetzen von (49) in (48) und Einführen der Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= (\eta f' - f)_{(\eta \rightarrow +\infty)} \\ c_2 &= (\eta f' - f)_{(\eta \rightarrow -\infty)} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

erhält man:

$$\bar{a} = \frac{c_1 + c_2 \cdot \lambda}{2(1 + \lambda^2)}. \quad (51)$$

Hierbei sind  $c_1$  und  $c_2$  selbst vom jeweiligen Wert  $\lambda$  abhängig. In Tabelle 3 sind für einige mit  $f_0 = 0$  ermittelten Lösungen [7] die Werte  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\bar{a}$  und die sich daraus ergebenden Werte für

$$\bar{c}_1 = (\bar{\eta} f' - f)_{(\bar{\eta} \rightarrow +\infty)} \quad (50a)$$

und

$$\bar{c}_2 = (\bar{\eta} f' - f)_{(\bar{\eta} \rightarrow -\infty)}$$

Tabelle 3. Werte  $c_1$ ,  $c_2$  nach Gl. (50),  $\bar{a}$  nach Gl. (51) und  $\bar{c}_1$ ,  $\bar{c}_2$  nach Gl. (50a) für verschiedene Werte  $\lambda = U_{(-\infty)}/U_{(+\infty)}$

$\lambda$	$c_1$	$c_2$	$\bar{a}$	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_2$
0	-0,528863	-1,238496	0,264432	0	1,238496
0,1	-0,488703	-0,968239	0,289865	-0,091027	0,910266
0,2	-0,442423	-0,769802	0,286723	-0,131023	0,655113
0,3	-0,392016	-0,612601	0,264127	-0,136238	0,454125
0,4	-0,338793	-0,483203	0,229342	-0,119891	0,299730
0,5	-0,283708	-0,373920	0,188267	-0,092826	0,185653
0,6	-0,227477	-0,279813	0,145355	-0,063233	0,105387
0,7	-0,170636	-0,197495	0,103652	-0,036668	0,052382
0,8	-0,113589	-0,124541	0,065007	-0,016425	0,020530
0,9	-0,056636	-0,059160	0,030354	-0,004072	0,004523

in Abhängigkeit von  $\lambda$  zusammengestellt. Interessant ist die Feststellung, daß sich im Falle  $\lambda = 0$  für die obere Außenströmung wegen  $\bar{c}_1 = 0$  überhaupt keine Verdrängungswirkung ergibt, so daß die außerhalb der Vermischungszone liegenden Stromlinien geradlinig weiterverlaufen, während die Nullstromlinie die Parabel

$$y = -2 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{(+\infty)}}} \cdot \bar{a} \quad (52)$$

mit  $\bar{a} = 0,264432$  beschreibt. Die Strömungsverhältnisse für diesen Fall sind in Abb. 10 schematisch skizziert.

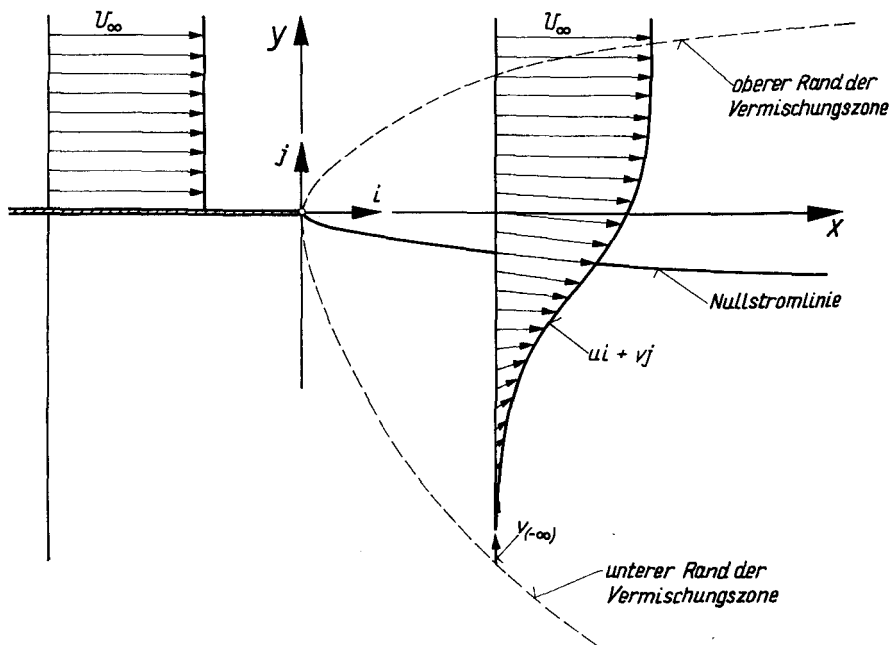


Abb. 10. Parallelströmung über ruhender Flüssigkeit (schematisch)

## 4.2. Lösungen mit $f'_0 < 0$

Es bleibt nun noch nachzuprüfen, ob die Lösungen, deren Anfangswerte  $f_0, f'_0$  im negativen  $f'$ -Bereich nach Abb. 2 liegen, physikalisch sinnvoll interpretiert werden können. Es mögen zunächst die Lösungen betrachtet werden, deren Anfangswerte  $f'_0 < 0$  auf der Ordinatenachse liegen ( $f_0 = 0$ ). Diese Lösungen können gedeutet werden als Grenzschichten längs einer halbunendlich langen ebenen Platte, deren Boden sich mit negativer Geschwindigkeit, d. h. in entgegengesetzter Richtung zur Außenströmung bewegt. Es fällt auf, daß es zu jedem Wert  $f'_0 < 0$  zwei mögliche Lösungen gibt, die auf verschiedenen Wegen den asymptotischen Wert  $f' = 2$  erreichen, da das Gebiet zwischen der Abszissenachse und der Enveloppe von Lösungskurven des Typs I doppelt belegt ist. In Abb. 11, Skizze a sind die Geschwindigkeits-

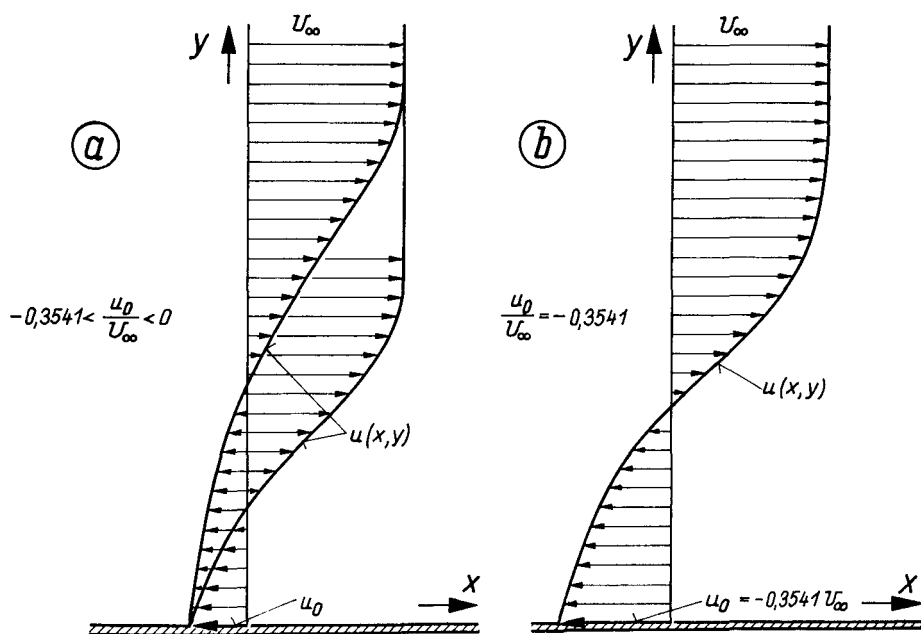


Abb. 11. Die Plattengrenzschicht bei gegenläufig bewegtem Boden (schematisch)

profile zweier solcher Lösungen schematisch dargestellt. In Abb. 12 ist  $f''_0$  in Abhängigkeit von  $f'_0$  bei  $f_0 = 0$  aufgetragen. Es existiert ein Grenzwert  $f'_{0G} = -0,7081$  mit  $f''_{0G} = 0,6153$ , dem in der  $f' - f''$ -Ebene nach Abb. 2 der Punkt auf der Enveloppe bei  $f = 0$  entspricht. Für  $f'_0 < f'_{0G}$  existiert keine Lösung mehr. Physikalisch bedeutet dies, daß die Geschwindigkeit des gegenläufigen Bodens der Platte den Betrag

$$|u_{0G}| = 0,7081 \cdot 1/2 U_\infty = 0,3541 U_\infty$$

nicht überschreiten darf. Dieser Grenzfall ist in Abb. 11, Skizze b schematisch dargestellt. Da man in einem wirklichen Experiment jedoch sicherlich diese

Geschwindigkeitsgrenze überschreiten kann, so erhebt sich auch im Hinblick auf die aufgezeigte Doppeldeutigkeit der Lösungen mit  $f_{0G} < f'_0 < 0$  die Frage, ob sich in einem Experiment überhaupt die hier berechneten Geschwindigkeitsverteilungen einstellen werden. Bemerkenswert an diesen Lösungen ist auch die Feststellung, die man an Hand von Abb. 12 machen kann, daß verglichen mit dem klassischen Fall der Blasiuschen Plattengrenzschicht trotz erhöhter Gesamtgeschwindigkeitsdifferenz zwischen Plattenboden und Außenströmung die Wandreibung abnimmt. Der experimentelle Nachweis dürfte sehr schwierig sein, da wegen des Wendepunktes, der in allen diesen Geschwindigkeitsprofilen vorhanden ist, die laminare Grenzschicht instabil ist und schnell in den turbulenten Zustand umschlägt.

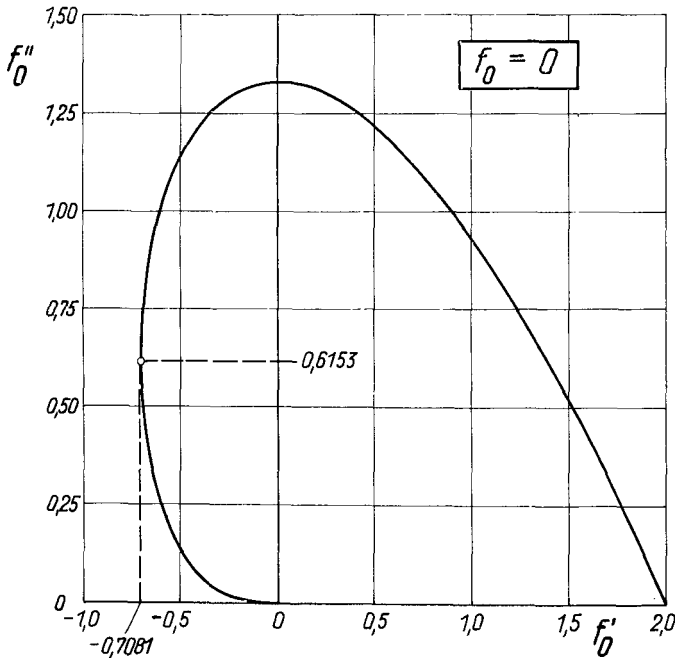


Abb. 12. Anfangswert  $f''_0$  in Abhängigkeit vom Anfangswert  $f'_0$  ( $f_0 = 0$ )

Die Fälle mit  $f_0 \neq 0$  und  $f'_0 < 0$  können ganz analog als Grenzschichtströmungen über eine Platte mit gegenläufig bewegtem Boden bzw. Ausblasen gedeutet werden. Mit zunehmendem Ausblasen ( $f'_0 < 0$ ) verringert sich die Grenzgeschwindigkeit  $f_{0G}$ , während sie sich mit zunehmender Absaugung ( $f'_0 > 0$ ) vergrößert entsprechend dem Verlauf der Enveloppe in Abb. 2. Auch hier gelten dieselben Einwände wie oben hinsichtlich der experimentellen Verwirklichung solcher Grenzschichten.

Schließlich soll noch kurz versucht werden, die exakte Lösung  $f' = -1/3 f^2$  nach Gl. (21 a) bzw. die ihr entsprechende Lösung  $f = 3/(\eta - \eta_0)$  nach Gl. (17) auf ihre physikalische Bedeutung hin zu untersuchen. Wegen des expliziten Auftretens der Variablen  $\eta$  in der Lösung Gl. (17) ist es am günstigsten, zu

der dimensionsbehafteten Schreibweise zurückzukehren. Nach Gln. (3) und (4) erhält man dann für die exakte Lösung:

$$\psi(x, y) = \frac{6 \nu x}{y - y_0}. \quad (53)$$

Daraus ergeben sich die Geschwindigkeitskomponenten

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = - \frac{6 \nu x}{(y - y_0)^2} \quad (54)$$

und

$$v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{6 \nu}{(y - y_0)}. \quad (55)$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Grenzschichtgleichungen (1) und (2) in der Tat erfüllt werden. Man erkennt jedoch, daß die  $v$ -Komponente durchaus von gleicher und für große  $y$  sogar höherer Größenordnung ist wie die  $u$ -Komponente, so daß die Grenzschichtvoraussetzungen nicht mehr zutreffen. Deshalb kommt dieser mathematisch exakten Lösung keine echte physikalische Bedeutung zu.

## Literatur

- [1] *H. Schlichting*: Grenzschicht-Theorie. 5. Auflage 1965, G. Braun, Karlsruhe.
- [2] *H. Blasius*: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. Phys. **56** (1908), 1–37.
- [3] *H. W. Emmons, D. Leigh*: Tabulation of the Blasius function with blowing and suction. ARC CP 157 (1964).
- [4] *J. Siekmann*: The laminar boundary layer along a flat plate. Z. Flugwiss. **10** (1962), 278–281.
- [5] *R. Iglisch, D. Grohne*: Die laminare Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit schrägem Absaugen und Ausblasen. Bericht 1/45 des Mathematischen Instituts der TH Braunschweig (1945).
- [6] *R. C. Lock*: The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams. Quart. J. Mech. Appl. Math. **4** (1951), 42–63.
- [7] *J. Steinheuer*: Exakte Lösungen für die laminare Vermischung zweier inkompressibler Parallelströmungen. DFL-Bericht Nr. 0251 (1964).
- [8] *Lu Ting*: On the mixing of two parallel streams. J. Math. Phys. **38** (1959), 153–165.
- [9] *W. A. Coppel*: On a differential equation of boundary-layer theory. Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A **253** Math. and Phys. Sciences (1960/61), 101–136.
- [10] *B. Punnis*: Zur Differentialgleichung der Plattengrenzschicht von Blasius. Arch. d. Mathematik **7**, Fasc. 3 (1956), 165–171.
- [11] *F. Kemnitz*: Diskussion der Grenzschichtgleichung des umströmten Keils  $f''' + f'' + \beta(1 - f'^2) = 0$  für  $-0,5 < \beta \leq 0$  mit Absaugen und Ausblasen. Dissertation TH Braunschweig, (1953); vgl. auch: *R. Iglisch, F. Kemnitz*: Über die in der Grenzschichttheorie auftretende Differentialgleichung  $f''' + f'' + \beta(1 - f'^2) = 0$  für  $\beta < 0$  bei gewissen Absauge- und Ausblasegesetzen. Festschrift: 50 Jahre Grenzschichtforschung, (Herausgeber H. Görtler u. W. Tollmien) Vieweg, Braunschweig 1955, 34–46.
- [12] *C. W. Jones*: On reducible non-linear equations occurring in mechanics. Proc. Roy. Soc. London A **217** (1953), 327–343.
- [13] *J. Siekmann*: Remarks on the differential equation  $\frac{dy}{dx} = \frac{y(y+x+2)}{x(2x-y)}$ . ZAMP **12** (1961), 565–567.